

**MAP-2121 - Primeiro exercício programa - 2011**  
**Método híbrido secante-dicotomia**

**Instruções gerais -**

Os exercícios computacionais pedidos na disciplina Cálculo Numérico têm por objetivo fundamental familiarizar o aluno com problemas práticos que requeiram técnicas numéricas em sua solução. Neste exercício programa sua tarefa será aprender e implementar um método para o cálculo de raízes de funções, além de aplicá-lo na solução de alguns problemas.

Seu programa deve ser entregue no sistema moodle **map2121.ime.usp.br** até o dia 15 de outubro. Não deixe para fazê-lo no final do prazo. O programa deve ser escrito em Linguagem C e ser compilado e executado com o compilador disponível através da página da disciplina (**www.ime.usp.br/~map2121**). Caso você desenvolva seu programa em outro compilador, confira se ele também compila e executa no DevC++ indicado. Programas que não compilarem terão notas muito baixas.

Ao desenvolver seu projeto você possivelmente trocará idéias com seus colegas. Esta interação é saudável e desejável, vocês estarão aprendendo mais. O seu programa deve, no entanto, ser desenvolvido por você individualmente, para que você realmente saiba fazê-lo. Haverá controle de cópias e caso estas sejam detectadas, os envolvidos terão nota zero no programa.

Bom trabalho!

**O método da secante**

O método da secante é um método para o cálculo de raízes de funções que apresenta convergência rápida local e não necessita o uso de derivadas das funções. Ele pode ser deduzido a partir do método de Newton substituindo-se a derivada por um quociente de diferenças, gerando a seguinte fórmula para o cálculo das aproximações:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n),$$

onde  $x_n$  e  $x_{n-1}$  são as duas últimas aproximações. A origem do nome vem do fato que  $x_{n+1}$  é a intersecção com o eixo  $x$  da reta que passa pelos pontos  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  e  $(x_n, f(x_n))$  (verifique!)

Pode-se mostrar que se  $\bar{x}$  é uma raiz simples de uma função  $f$  então, em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\bar{x}$  temos (sob condições bem gerais para  $f$ )

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |x_n - \bar{x}|^q, \quad \text{onde } q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ (razão áurea).}$$

Note que a convergência é superlinear, porém não é quadrática como no método de Newton. Por outro lado, não é necessário o cálculo de derivadas e, após iniciarmos o método da secante com dois valores, somente uma avaliação de função é necessária a cada passo.

Um problema comum aos dois métodos (e a muitos outros) é que podemos garantir a convergência apenas localmente. Uma possibilidade para enfrentar esta dificuldade é combiná-los com um outro método cuja convergência é garantida, porém em geral lenta. O método da dicotomia tem essa qualidade e esse defeito. Ao combiná-lo com um método de convergência rápida local, espera-se obter o melhor dos dois métodos (com um pequeno custo adicional). Neste exercício programa, usaremos os métodos da secante e dicotomia.

### Combinando os métodos da secante e dicotomia

A idéia geral consiste em obter intervalos que isolam a raiz e cujos comprimentos tendem a zero, usando o método da secante quando a aproximação calculada por ele não sai do intervalo atual, e o método da dicotomia caso contrário. Para tanto, precisaremos de três pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , onde  $b$  é a aproximação atual,  $c$  é a aproximação anterior e  $a$  é tal que  $f(a) * f(b) < 0$  ( $a$  não é necessariamente menor do que  $b$ ).

Inicialmente,  $a$  e  $b$  isolam a raiz, onde  $b$  é tal que  $|f(b)| \leq |f(a)|$  e  $c = a$  (uma escolha razoável para se iniciar o método). As aproximações são calculadas em um laço. Para a nova aproximação, use a dicotomia caso o método da secante não calcule um valor entre  $a$  e  $b$ . Especificamente, se

$$(b - c)f(b) [(a - b)(f(b) - f(c)) + (b - c)f(b)] > 0$$

então (POR QUE?)

$$b = \frac{a + b}{2}, \quad c = b.$$

Senão,

$$b = b - \frac{b - c}{f(b) - f(c)} f(b), \quad c = b.$$

Após atualizarmos  $b$  e  $c$ , precisamos ainda verificar se a raiz está cercada, o que deixa de acontecer quando  $f(b)$  troca de sinal. Neste caso devemos trocar  $a$  pelo antigo valor de  $b$  (que agora é  $c$ ), garantindo que a raiz está entre  $a$  e  $b$ :

$$\text{se } f(a) * f(b) > 0 \text{ então } a = c.$$

É preciso ainda um cuidado adicional. Pode acontecer que os valores calculados pelo método da secante, mesmo dentro do intervalo atual, não mudem muito quando não estamos suficientemente próximos da raiz. Este comportamento pode ser monitorado (por exemplo) verificando se, a cada três passos, o tamanho do intervalo diminuiu mais do que 8 vezes em relação ao tamanho de três passos atrás (queremos um método melhor do que a dicotomia). Se isto não ocorrer, use a dicotomia três vezes antes de voltar a decidir sobre o uso da secante.

## Implementação

Escreva um programa em C que, dada uma função  $f$ , calcula uma raiz isolada  $\bar{x}$  desta função. Você deve especificar um intervalo inicial  $[a, b]$  que isola a raiz e obter uma aproximação para ela usando o método híbrido secante-dicotomia descrito acima. Como se trata de um método iterativo, é preciso impor critérios de parada. Faça isto especificando um número máximo de iterações MAXIT e uma tolerância EPS para o erro relativo:  $|b - a| < EPS * |b|$  (a raiz está sempre entre  $a$  e  $b$  e o tamanho do intervalo diminui a cada iteração).

O programa deve imprimir a aproximação obtida e também os valores iniciais de  $a$  e  $b$ , os valores usados para MAXIT e EPS, o número de iterações e a quantidade total de avaliações da função  $f$ .

Teste o seu programa nos exemplos abaixo. Use *dupla precisão*, MAXIT=50 e EPS= $10^{-8}$ .

## Intersecção de curvas em coordenadas polares

Queremos saber quais os pontos de intersecção das duas curvas cujas equações em coordenadas polares são (considere  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )

1.  $r = e^{\sin \theta} - 2 \cos(4\theta)$
2.  $r = 1 - \sin \theta$
3.  $r = \sin^2(4\theta) + \cos(4\theta)$
4.  $r = 1 + 2 \sin(\theta/2)$

### Obsevações:

- Note que são pedidos 6 conjuntos de intersecções.
- Em alguns casos temos  $r < 0$ . Assim convém lembrar que um ponto com coordenadas polares  $(r, \theta)$  é o mesmo que com coordenadas  $(-r, \theta + \pi)$ .
- Use algum pacote gráfico para se ter uma idéia destas curvas.
- Como o método necessita de um intervalo onde a função troca de sinal, é possível que algumas intersecções escapem.
- Um ponto de partida para a procura automática das raízes seria particionar o intervalo  $[0, 2\pi]$  em, digamos, 100 subintervalos e depois testar cada um deles.

## Queda de um corpo sob ação da resistência do ar

A equação diferencial para a velocidade de um corpo em queda de massa  $m$  sob ação de uma força de resistência do ar proporcional à velocidade é

$$mv'(t) - mg + kv(t) = 0.$$

A solução com velocidade inicial  $v(0) = v_0$  é dada por (verifique!)

$$v(t) = \frac{mg - e^{-kt/m}(mg - v_0k)}{k}.$$

Supondo as constantes  $g = 10$  e  $m = 1$ , qual será o valor de  $k$  se soubermos que com  $v_0 = 3$  temos  $v(2) = 20$ ?

### Altura de fios de transmissão de eletricidade

Usando princípios da Física pode-se mostrar que quando um cabo flexível for pendurado entre dois postes, ele tomará a forma de uma curva  $y = f(x)$  que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde  $\rho$  é a densidade linear do cabo,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $T$  é a tensão do cabo em sua parte mais baixa. Uma solução para a equação acima é dada por (verifique!)

$$f(x) = \frac{T}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right).$$

Um cabo pendurado sempre toma a forma de uma catenária  $y = f(x) = c + a \cosh(x/a)$  onde  $c$  e  $a$  são constantes. Suponha que tenhamos um cabo pendurado entre  $x = -10$  e  $x = 10$ . Determine o valor de  $a$  tal que a diferença de altura  $f(10) - f(0)$  seja igual a 0.5